Επιχειρησιακή Έρευνα 22/11 (1)

Στοχαστικά Προβλήματα

x_k: το διαθέσιμο απόθεμα στην αρχή της κ περιόδου

u_k: η ποσότητα παραγγελίας

w_k: η ζήτηση στην διάρκεια της κ περιόδου

$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k$

$r(x_k) + c\,u_k$

$E\left(R(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(r(x_k) + c\,u_k\right)\right)$ ← κόστος λειτουργίας

$(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ $\mu_k(x_k) = u_k$

$J_\pi(x_0) = E\left(R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(r(x_k) + c\,\mu_k(x_k)\right)\right)$

$$\mu_k(x_k) = \begin{cases} S_k - x_k & \text{αν } x_k < S_k \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

1) $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k)$

2) w_k

3) περιορισμός $u_k \geq 0$

$u_k \in U_k(x_k)$

4) $E\left(g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k)\right)$

$\pi = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1})$

$u_k = \mu_k(x_k)$ παραδεκτή (admissible)

$x_{k+1} = f_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$

$$J_\pi^+(x_0) = \min_{A \in \pi} A_\pi(x_0)$$

$$J_\pi^+(x_0) = \min_{N \in \pi} J(x_0) \rightarrow$$ ελάχιστο κόστος

$\underline{N-1}$

$$C u_{N-1} + E R(x_N) =$$

$$= C u_{N-1} + E R(x_{N-1} + u_{N-1} - w_{N-1})$$

πλέον έχω να βελτιστοποιήσω ως προς 1 μεταβλητή το u_{N-1}

$$r(x_{N-1}) + \min_{u_{N-1} \geq 0} \left(C u_{N-1} + \underset{w_{N-1}}{E} R(x_{N-1} + u_{N-1} - w_{N-1}) \right) = J_{N-1}(x_{N-1})$$

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = r(x_{N-2}) + \min_{u_{N-2} \geq} \left(C u_{N-2} + \underset{w_{N-2}}{E} \left(J_{N-1}(x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2}) \right) \right)$$

$$J_k(x_k) = r(x_k) + \min_{u_k \geq 0} \left(C u_k + \underset{w_k}{E} \left(J_{k+1}(x_k + u_k - w_k) \right) \right)$$

Γενική σχέση $J_N(x_N) = 0$

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} \underset{w_k}{E} \left(g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k, w_k)) \right)$$

Παράδειγμα

Εξίσωση αποθέματος $x_{k+1} = \max\{0, x_k + u_k + w_k\}$

Περιορισμός $x_k + u_k \le 2$

κόστος διατήρησης $(x_k + u_k - w_k)^2$

κόστος αγοράς $c = 1$

Άρα γενική σχέση $g_k(x_k, u_k, w_k) = \overset{c=1}{1} \cdot u_k + (x_k + u_k - w_k)^2$

$g_N(x_N) = 0$

$x_0 = 0$

$P(w_k = 0) = 0.1$

$P(w_k = 1) = 0.7$

$P(w_k = 2) = 0.2$

έχω 3 περιόδους.

$J_3(x_3) = 0$

$$J_k(x_k) = \min_{\substack{0 \le u_k \le 2 - x_k \\ u_k = 0,1,2}} E_{w_k}\left(u_k + (x_k + u_k - w_k)^2 + J_{k+1}(\max\{0, x_k + w_k - w_k\})\right)$$

$\boxed{K=2}$

$x_2=0$

$$J_2(0) = \min_{u_2=0,1,2} \left\{ E_{w_2} \{u_2 + (u_2 - w_2)^2\} \right\} =$$

$$= \min_{u_2=0,1,2} \left\{ (u_2+(u_2-0)^2)P(0) + (u_2+(u_2-1)^2)P(1) + (u_1+(u_2-2)^2)P(2) \right\} =$$

$$= \min_{u_2=0,1,2} \left\{ u_2 + 0.1u_2^2 + (u_2-1)^2 \cdot 0.7 + 0.2(u_2-2)^2 \right\} = \min\{1.5, 1.3, 3.1\} = 1.3$$

Άρα $\mu_2^*(0) = 1$

$x_2=1$

$$J_2(1) = \min_{u_2=0,1} \left\{ E_{w_2} (u_2 + (1+u_2-w_2)^2) \right\} =$$

$$= \min_{u_2=0,1} \left\{ (u_2+(1+u_2-0)^2)P(0) + (u_2+(1+u_2-1)^2)P(1) + (u_2+(1+u_2-2)^2)P(2) \right\} =$$

$$= \min \{0.3, 2.1\} = 0.3$$ Άρα $\mu_2^*(1) = 0$

$x_2=2 \Rightarrow u_2=0$

$$J_2(2) = E_{w_2} (2-w_2)^2 = 1.1$$ Άρα $\mu_2^*(2) = 0$

$\boxed{K=1}$

$$J_1(0) = \min_{u_1=0,1,2} \left\{ E(u_1+(u_1-w_1)^2) + J_2(\max\{0, u_1-w_1\}) \right\} =$$

$$= \min_{u_1=0,1,2} \left\{ (u_1+(u_1-0)^2 + J_2\max(0,u_1-0))P(0) + (u_1+(u_1-1)^2 + J_2\max\{0,u_1-1\})P(1) + (u_1+(u_1-2)^2 + J_2\max\{0,u_1-2\})P(2) \right\}$$

$$\text{~~εαυτ~~} = \min\{2.8,\ 2.5,\ 3.68\} = 2.5$$

Άρα $\mu_1^+(0) = 1$

$$J_1(1) = \min_{u_1=0,1}\left\{ \underset{w_1}{E}\left(u_1 + (1+u_1-w_1)^2 + J_2(\max\{0,\ 1+u_1-w_1\})\right)\right\} =$$

$$= \{1.2,\ 2.68\} = 1.2 \quad \text{Άρα } \mu_1^+(1) = 0$$

$J_1(2) = 1.68$ Άρα $\mu_1^+(2) = 0$

$\boxed{t=0}$ Ξέρω ότι $x_0 = 0$ μόνο

$$J_0 = \max_{u_0=0,1,2}\left\{ \underset{w_0}{E}\left(u_0 + (u_0-w_0)^2 + J_1(\max\{0, u_0-w_0\})\right)\right\} =$$

$$= \min\{4,\ 3.67,\ 5.18\} = 3.67 \quad \text{Άρα } \mu_0^+(0) = 1$$

Στο 0 παράγγειλα 1 μονάδα

1 " 1 " στο επίπεδο 0 μόνο

2 " 1 -"- -"-

Κανόνας παραγγελίας Παραδείγματος 1

Άρα όταν δεν έχω απόθεμα παραγγέλνω 1 μονάδα ενώ όταν έχω δεν παραγγέλνω τίποτα.

Σε τέτοια παραδείγματα θέλω να βρω στην ουσία την πολιτική και τον κανόνα παραγγελίας της επιχείρησης.

Παράδειγμα

Βελτιστοποίηση σκάκι.

+1 νικητής, 0 ηττημένος, 0.5 ισοπαλία (σε κάθε παίκτη)

Αν σκορ 1-1 στο τέλος των 2 παιχνιδιών οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν μέχρι 1η νίκη.

Στρατηγικές A, B

A: ισοπαλία με πιθανότητα p_d ή χάνει με $1-p_d$

B: κερδίζει με πιθανότητα p_w ή χάνει $1-p_w$

Θέλουμε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα νίκης. Η στρατηγική που επιλέξει στο 1ο παιχνίδι δεν επηρεάζει την επιλογή στρατηγικής του 2ου κ.λ.π. Ανεξαρτησία.

σκορ: πόντοι παίκτη - πόντοι αντιπάλου

$$J_k(x_k) = \max\{ p_d J_{k+1}(x_k) + (1-p_d) J_{k+1}(x_k-1),\ p_w J_{k+1}(x_k+1) + (1-p_w) J_{k+1}(x_k-1) \}$$

τελευταίο παιχνίδι

$$J_N(x_N) = \begin{cases} 1 & x_N > 0 \\ p_w & x_N = 0 \\ 0 & x_N < 0 \end{cases}$$

Άρα για να δώσω απάντηση στο ερώτημα πρέπει να φτάσω μέχρι το $N-2$

$p_d > p_w$

~~[illegible]~~

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \max\{P_d J_N(x_N) + (1-P_d) J_N(x_{N-1}),\ \cancel{\ldots}$$
$$, P_w J_w(x_{N-1}+1) + (1-P_w) J_N(x_{N-1}-1)\}^{*} = 1 \quad x_{N-1} > 1$$

$$J_{N-1}(1) = \max\{P_d J_N(1) + (1-P_d) J_N(0),\ P_w J_N(2) + (1-P_w) J_N(0)\} =$$

$$= \max\{P_d (1-P_d) P_w,\ P_w + (1-P_w) P_w\} = \begin{cases} P_d + (1-P_d) P_w & (A) \text{ αν } P_d > P_w \end{cases}$$

$$J_{N-1}(0) = \max\{P_d J_N(0) + (1-P_d) J_N(-1),\ P_w J_N(1) + (1-P_w) J_N(-1)\} =$$

$$= \max\{P_d P_w + (1-P_d)\cdot 0,\ P_w + (1-P_w)\cdot 0\} = P_w \ (B)$$

$$J_{N-1}(-1) = \max\{P_d J_N(-1) + (1-P_1) J_N(-2),\ P_w J_N(0) + (1-P_w) J_N(-2)\} =$$

$$= \max\{0, P_w^2\} = P_w^2 \quad (B)$$

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = 0^{*} \quad x_{N-1} < -1$$

$$J_{N-2}(0) = \max\{P_d J_{N-1}(0) + (1-P_d) J_{N-1}(-1),\ P_w J_{N-1}(1) + (1-P_w) J_{N-1}(-1)\} =$$

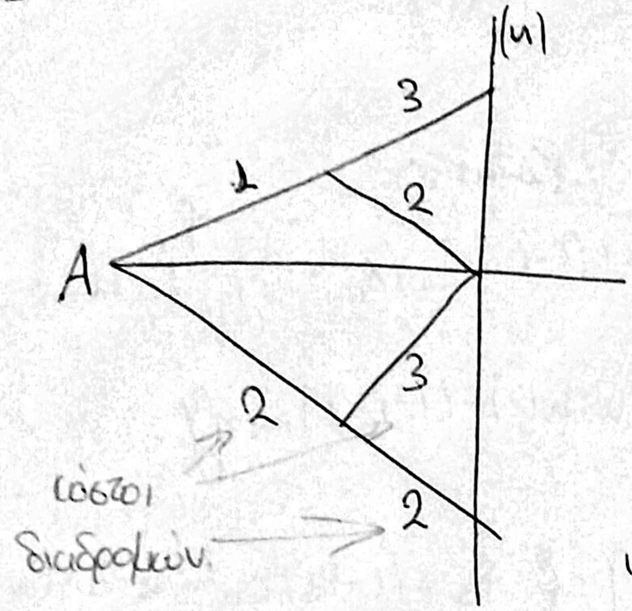
$$= \max\{P_d P_w + (1-P_d) P_w^2,\ P_w(P_d + (1-P_d)) d_w + (1-P_d) P_w^2\} \quad (B)$$

B ακολουθεί όταν βρίσκεται σε ισοπαλία και όταν χάνει.

A -//- μπροστά στο σκορ

* Θεωρητικά αυτά δεν μπορούν να συμβούν.

Άσκηση για σπίτι.



Βρίσκομαι στον κόμβο A μπορώ να πάω δεξιά ή αριστερά. Μου δίνεται οδηγία. Αν την ακούσω είναι πιθ. p. Αν δεν την ακούσω $(1-p)$ επιλέγω άλλη κατεύθυνση με πιθ q ή παραμένω στην ίδια θέση με κόστος μ.

$$p = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{1}{4}$$

$$\mu = 3$$

Ποιες οδηγίες πρέπει να δώσω ώστε να φτάσω στο τέλος με το ελάχιστο κόστος. Προορισμός που είναι η ευθεία (η)